



TITLE:

円形マイクロディスクレーザーに
おける定常発振(修士論文(2001年度
)

AUTHOR(S):

窪田, 光宏

CITATION:

窪田, 光宏. 円形マイクロディスクレーザーにおける定常発振(修士論文
(2001年度)). 物性研究 2002, 78(5): 618-647

ISSUE DATE:

2002-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97273>

RIGHT:

修士論文 (2001年度)

円形マイクロディスクレーザにおける定常発振

窪田光宏 (立命館大学大学院理工学研究科)

目次

| | |
|-------------------------|-----|
| 1 はじめに | 618 |
| 2 Maxwell-Bloch 方程式 | 619 |
| 3 Schrödinger-Bloch 方程式 | 622 |
| 4 エネルギーバランスを基礎にした発振の物理 | 624 |
| 4.1 線形安定化法を用いた解析 | 624 |
| 4.2 飽和効果について | 628 |
| 5 発振に寄与する固有モード | 629 |
| 5.1 線形複素固有値問題 | 629 |
| 5.2 非線形定常問題 | 632 |
| 6 動的シミュレーション | 635 |
| 6.1 定常発振と閾値 | 636 |
| 6.2 発振モードの選択性 | 639 |
| 6.2.1 単一モード発振の特性 | 639 |
| 6.2.2 多モード発振の特性 | 641 |
| 7 総括と今後の展望 | 646 |
| 8 謝辞 | 646 |

1 はじめに

マイクロディスクレーザは理論からも実験からも研究が行なわれている、現在非常に注目を浴びているデバイスである。最初に円形キャビティで発振が確認されて以来 [1]、現在に至るまで次々に新しい研究成果が発表されている。まずどのようにマイクロディスクを作成するか始まり、実用上もっとも重要なレーザ発振の閾値を下げるための方法 [2][3]、またディスクの形状が発振モードに大きな影響を与えるため、その形状も円形のみにとどまらず [4] [5]、楕円形 [6] や競技場の形のもの、またディスクに穴を開けたものなど [7]、多種多様な形状のディスクおよび観測方法を用いてレーザ発振が調べられてきている [8][9]。今まで観測された主なレーザ発振としては、Rayleigh 卿が始めに発見した、境界面を全反射を繰り返しながら伝播していく whispering gallery モードや [10]、少し変わったものとしては蝶ネクタイのような三角形を向かい合わせに 2 つ横に並べたようなモードも観測されている [11]。実用的な見地からみ

でも、例えば whispering gallery モードはディスク内を全反射を繰り返しながら伝播するためエネルギー損失が少なく、閉じ込め効率を表すパラメーターである Q 値を非常に大きくすることが可能であり、ひいてはレーザー発振の閾値を 1 次元レーザーに比べて低くすることができるため、デバイスの高集積化に対応した将来有望なデバイスの 1 つに数えられている [12]。

マイクロディスクレーザーには物理的見地からみても様々な面白い特質がある。まず第一にマイクロディスクレーザーは微小共振器である [13]。このことはディスクの形状によって、発振するモードが大きく変わるということを意味する。すなわちキャビティの形状により最も増幅されやすいモードが決定され、そのモードが選出されるのである。その過程はかなり複雑な様相を呈しており、線形方程式の場合ならば共鳴状態にあるものの、マイクロディスク端からエネルギーが浸みだしていくために発振しない、核物理の分野でよく知られているところのガモフ状態のような固有値が虚部を持つようなモードが、非線形項を通してエネルギーが供給されるようになった途端、そのエネルギー損失と供給がつりあい始め、最終的にそのようなモードが発振モードに化けるということが起こっている。このことをもっと簡単に身近な現象にたとえて説明するならば、元々与えた振動が管体との共振により調和され、増幅される特性を持つ楽器を想像すればよい [14]。第二の大きな特徴は 2 次元レーザーであるということである。一般に今までレーザーというと 1 次元レーザーであった。しかし今回の研究ではこの 2 次元レーザーであるという特質に由来した様々な現象を数値実験において観測することができた。その一つは利得が 2 次元上に広がって存在するために、モードの住み分けが起こり、容易に多モード発振が起こり得るということに現れている [15]。

我々の立場としては、この様々な興味深い特徴を持つ系を表す非線形の時間発展モデルを作り、あくまでもその発振過程に着目し、発振モードがどのように選択されていくかを説明することに全力を挙げた。これまでは幾何光学の立場からモデルを作り、レーザー発振を議論したものや [16] [17]、同じ波動光学の立場に立ち、しかし線形方程式を解くことにより whispering gallery が発振することを確認したものや [18]、レーザー媒質からの寄与を考慮し、定常状態を求めたもの [19][20] などさまざまあるが、それらのモデルではモード競合や飽和効果など非線形効果にからむような現象を説明することは困難である [21]。最終的な大目標としては、実際の実験結果と我々の数値結果の定性的比較もさることながら、古典力学と量子力学の対比関係のような関係にある幾何光学と波動光学をレーザー発振という現象を通して比較し、その中でも幾何光学で取り扱った場合ではカオス軌道を描くものを波動光学で取り扱った場合に、どのような状態が実現されるのかという問題は、古典カオスが量子カオスとどのような対応関係にあるのかを知るための一つの手段になり得ることが期待される。

これまで安定な定常発振が得られなかったこれまでのモデルを改良し、時間発展の様子を今までよりも詳しく議論していくために必要と思われるデータを得るため、様々な工夫をしてきた。今までのところ調べてきたキャビティの形状は円形のみにとどまっているが、円形のものに限っていえば、系の特徴をよく調べることができた。これらをまとめ報告する。

ここで本文の流れを説明する。2 章、3 章を通して我々の立てたモデルの説明をし、4 章でこの系の定常発振について一定理解が得られることを目的として構成する。5 章では固有値を用いてレーザー発振を解析する方法を提示し、6 章では計算結果の紹介をする。7 章ではこれからの研究の展望やその方向性を示したい。

2 Maxwell-Bloch 方程式

この章ではマクスウェル方程式より導かれる分極による効果も考慮に入れた伝播方程式と、レーザー媒質による分極と分布反転の時間発展を記述するブロッホ方程式を分けて考え、最終的にこれらの方程式を組み合わせることにより Maxwell-Bloch 方程式を導く。

電場 E 、磁場 H 、分極 P を用いて、マクスウェル方程式は以下のように書き下せる。

$$\text{rot}E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div}D = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (2.4)$$

$$D = \epsilon E + 4\pi P \quad (2.5)$$

$$B = \mu H \quad (2.6)$$

ここで D を電束密度、 B は磁束密度、 c は真空中の光速度、 ϵ と μ はそれぞれ誘電率と透磁率である。とくにここでは非常に薄いディスクを想定しているために、 z 方向の厚さは一波長程度であると仮定する。その結果 z 方向への電場は一様であるみなすことができ、この条件の下でマクスウェル方程式を計算していくと

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.9)$$

また同様に

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E_x + 4\pi P_x) \quad (2.10)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E_y + 4\pi P_y) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E_z + 4\pi P_z) \quad (2.12)$$

ここで TE モード と TM モードの両方があるが、系の情報を引き出すためにはとりあえずはどちらかを調べればよいので、ここでは $H_z = 0$ とし取り扱いが簡単な TM モードを取り出すことにすると

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon E_z + 4\pi P_z) = \frac{c}{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z \quad (2.13)$$

また、屈折率 $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ が成り立ち、屈折率はディスクの内と外では大きく変動するため、ディスク内では $n = n_{in}$ 、ディスク外では $n = n_{out}$ とする。以上よりディスク内の電場の伝播方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(E_z + \frac{4\pi P_z}{\epsilon} \right) = \frac{c^2}{n^2} \nabla_{xy}^2 E_z \quad (2.14)$$

で与えられる。

次にレーザ媒質を考慮したブロッホ方程式を導く。そのために2準位媒質を仮定してモデルを立てる。2準位系ハミルトニアンは、基底状態を $|-\rangle$ 、励起状態を $|+\rangle$ で表し、双極子モーメントを d とおくと

$$\hat{H} = \hbar(\omega_+|+\rangle\langle+| + \omega_-|-\rangle\langle-|) - dE_z \quad (2.15)$$

と書け、ただし

$$d = d_{+-}|+\rangle\langle-| + d_{-+}|-\rangle\langle+| \quad (2.16)$$

ここで、励起状態にある光子数を a 、基底状態にある光子数を b とすると、2準位媒質中での波動関数 Ψ は

$$\Psi(t) = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (2.17)$$

で表示され、これを Schödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = \hat{H} \Psi(t) \quad (2.18)$$

に代入し展開していくと

$$\begin{aligned} i\hbar(\dot{a}|+\rangle + \dot{b}|-\rangle) &= (\hbar(\omega_+|+\rangle\langle+| + \omega_-|-\rangle\langle-|) \\ &\quad - dE_z)(a|+\rangle + b|-\rangle) \\ &= \hbar(\omega_+a|+\rangle + \omega_-b|-\rangle \\ &\quad - d_{+-}E_zb|+\rangle + d_{-+}E_za|-\rangle) \end{aligned}$$

したがって

$$i\hbar\dot{a} = \hbar\omega_+a - d_{+-}b \quad (2.19)$$

$$i\hbar\dot{b} = \hbar\omega_-b - d_{-+}a \quad (2.20)$$

ここで正負の双極子モーメントがお互いに与える力の大きさが等しいとして $\mu = 2d_{+-} = 2d_{-+}$ とすると、基底状態と励起状態にある光子数に関する方程式

$$\dot{a} = -i\omega_+a + i\frac{\mu}{2\hbar}E_zb \quad (2.21)$$

$$\dot{b} = -i\omega_-b + i\frac{\mu}{2\hbar}E_za \quad (2.22)$$

が求められる。次に分極と分布反転をそれぞれ

$$\rho = 2ab^*, \quad W = |a|^2 - |b|^2 \quad (2.23)$$

とおき、 ρ に関する方程式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 2b^* \frac{da}{dt} + 2a \frac{db^*}{dt} \\ &= -2iab^*(\omega_+ - \omega_-) - i\frac{\mu}{\hbar}E_z(|a|^2 - |b|^2) \end{aligned}$$

遷移周波数を $\omega_0 = \omega_+ - \omega_-$ とし、 $\kappa = \frac{\mu}{\hbar}$ とすることにより

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega_0\rho - i\kappa E_z W \quad (2.24)$$

また分布反転 W は

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{da}{dt}a^* + a\frac{da^*}{dt} - \left(\frac{db}{dt}b^* + b\frac{db^*}{dt}\right) \\ &= (-i\omega_+a + i\frac{\mu}{2\hbar}E_z b)a^* + a(-i\omega_+a^* - i\frac{\mu}{2\hbar}E_z b^*) \\ &\quad - (-i\omega_-b + i\frac{\mu}{2\hbar}E_z a)b^* - b(-i\omega_-b^* - i\frac{\mu}{2\hbar}E_z a^*)\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$= -2i\kappa E_z(\rho - \rho^*) \quad (2.26)$$

実際の媒質中では、個々の光子が相互作用を繰り返すことによって、瞬時に位相の情報が失われ平均化され、反転分布も熱振動や外部からの摂動によって W_∞ に緩和されていくと考えるのが自然であり、これらの影響を考慮して2つの減衰定数 γ_\perp 、 γ_\parallel を分極、反転分布の方程式にそれぞれ導入することにより以下の2式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega\rho - \gamma_\perp\rho - i\kappa E_z W \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2i\kappa E_z(\rho - \rho^*) - \gamma_\parallel(W - W_\infty) \quad (2.28)$$

またセミマクロ分極の分布密度を N とすれば巨視的な分極 P_z は

$$P_z = N\mathbf{p} = N(\rho + \rho^*)\kappa\hbar \quad (2.29)$$

と与えられる。

(2.27) 式と (2.28) 式はブロッホ方程式として知られている。以上よりマクスウェル方程式から導かれた伝播方程式とレーザー媒質によるキャビティへのエネルギー供給を考慮して得られたブロッホ方程式をまとめて、Maxwell-Bloch 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E_z + \frac{4\pi P_z}{\epsilon}) = \frac{c^2}{n^2}\nabla_{xy}^2 E_z \quad (2.30)$$

$$P_z = N(\rho + \rho^*)\kappa\hbar \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega_0\rho - \gamma_\perp\rho - i\kappa E_z W \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2i\kappa E_z(\rho - \rho^*) - \gamma_\parallel(W - W_\infty) \quad (2.33)$$

を得る。

3 Schrödinger-Bloch 方程式

誘導放出から生じる遷移周波数 ω_0 は非常に大きいため、Maxwell-bloch 方程式の数値積分は困難である。そこでこの効果をそぐ為に大きな ω_0 を抜き出すことによって、時間的にゆっくり変動する方程式を得ることができる。すなわち

$$E_z = e^{-i\omega_0 t}\tilde{E}(t, \mathbf{x}) + c.c.$$

$$\rho = -ie^{-i\omega_0 t}\tilde{\rho}(t, \mathbf{x})$$

として E_z, ρ を書き直し、(2.30) 式に代入することにより

$$\begin{aligned}
 & -i\omega_0^2 \tilde{E}(t, \mathbf{x}) - 2i\omega_0 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) \\
 & + \frac{4\pi}{\epsilon} N \kappa \hbar \left(i\omega_0^2 \tilde{\rho}(t, \mathbf{x}) - 2\omega_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - i \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) \right) \\
 & + \frac{4\pi}{\epsilon} N \kappa \hbar \exp(2i\omega_0 t) \left(i\omega_0^2 \tilde{\rho}^*(t, \mathbf{x}) - 2\omega_0 \frac{\partial \tilde{\rho}^*}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + i \frac{\partial^2 \tilde{\rho}^*}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) \right) \\
 & = \frac{c^2}{n^2} \nabla_{xy}^2 \tilde{E}(t, \mathbf{x})
 \end{aligned}$$

が得られる。

ここで ω_0 が非常に速く振動するということを考慮して $\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2}, \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \ll 1$ と考えて整理すると

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\omega_0 + \frac{1}{\omega_0} \frac{c^2}{n^2} \nabla_{xy}^2 \right) \tilde{E} + \frac{2\pi N \kappa \hbar}{\epsilon} \omega_0 \tilde{\rho} \quad (3.1)$$

となる。

しかしここでもまだ方程式の中に ω_0 が残っているため、数値計算上都合が悪い、そこで以下のように時間と座標のスケールを取り直せば

$$t_{new} = \omega_0 t_{old}, \quad (x_{new}, y_{new}) = \left(\frac{\omega_0 n_{in}}{c} x_{old}, \frac{\omega_0 n_{in}}{c} y_{old} \right)$$

(3.1) 式は

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(1 + \frac{n_{in}^2}{n^2} \nabla_{xy}^2 \right) \tilde{E} + \frac{2\pi N \kappa \hbar}{\epsilon} \tilde{\rho} \quad (3.2)$$

となる。

ここで同様に $\tilde{\rho}$ と W についても計算を行なうと

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{\gamma_{\perp}}{\omega_0} \tilde{\rho} + \frac{\kappa W}{\omega_0} \tilde{E}$$

となり、ここで

$$\tilde{\gamma}_{\perp} = \frac{\gamma_{\perp}}{\omega_0}, \quad \tilde{\gamma}_{//} = \frac{\gamma_{//}}{\omega_0}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\omega_0}$$

と時間スケールと同様に取り直せば

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\tilde{\gamma}_{\perp} \tilde{\rho} + \tilde{\kappa} W \tilde{E} \quad (3.3)$$

と分極に関する方程式が得られ、また W に関する方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa} (\tilde{E} \tilde{\rho}^* + \tilde{E}^* \tilde{\rho} + \tilde{E} \tilde{\rho} e^{-2i\omega_0 t} + \tilde{E}^* \tilde{\rho}^* e^{2i\omega_0 t}) - \tilde{\gamma}_{//} (W - W_{\infty})$$

となるのであるが、指数関数がかかっている項は非常に速く振動するために、今対象にしている時間幅では大きく効いてこないため、最終的に

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa} (\tilde{E} \tilde{\rho}^* + \tilde{E}^* \tilde{\rho}) - \tilde{\gamma}_{//} (W - W_{\infty}) \quad (3.4)$$

としてもよい。

ここで (3.2) 式の両辺に $\frac{n^2}{n_{in}^2}$ をかけることにより、方程式

$$\frac{n^2}{n_{in}^2} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\frac{n^2}{n_{in}^2} + \nabla_{xy}^2 \right) \tilde{E} + \frac{n^2}{n_{in}^2} \frac{2\pi N \tilde{\kappa} \hbar}{\epsilon} \tilde{\rho}$$

が求められるのであるが、 n と n_{in} の差があまり大きくない場合には左辺の $\frac{n^2}{n_{in}^2}$ をだいたい 1 で近似しても物理的に不都合はないので [21]

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \tilde{E} + \frac{2\pi N \tilde{\kappa} \hbar}{\epsilon} \tilde{\rho} \quad (3.5)$$

そのうえこのような近似を施すことにより、扱いにくかったマクスウェル型の方程式を、その解の形がよく知られているシュレディンガー型の方程式へと書き換えることができる。すなわち、線形部分のみを取り出して考えれば、その解を全てベッセル関数とハンケル関数の重ね合わせで表すことが可能である。ささいな近似ではあるが、このようにモデル方程式を立てることによって、この後続く全ての章においてその恩恵を受けることができる。以上の考察に基づいてモデル方程式となる Schrödinger-Bloch 方程式が導かれた。

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \tilde{E} + \frac{2\pi N \tilde{\kappa} \hbar}{\epsilon} \tilde{\rho} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\tilde{\gamma}_\perp \tilde{\rho} + \tilde{\kappa} W \tilde{E} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa}(\tilde{E}\tilde{\rho}^* + \tilde{E}^*\tilde{\rho}) - \tilde{\gamma}_\parallel(W - W_\infty) \quad (3.8)$$

4 エネルギーバランスを基礎にした発振の物理

この章では 3 章で求められた非線形連立偏微分方程式である Schrödinger-Bloch モデル方程式を、エネルギーの流れという観点から考察することによって、数値計算に頼らず近似的にレーザー発振機構についての物理的描像を得ることを主眼とする。特にここでは、安定な発振を考えるにあたり、実験的には存在するはずのマイクロキャビティ自体による吸収項もモデル方程式に組み込みつつ議論していく。

4.1 線形安定化法を用いた解析

まず初めに線形安定解析による解析を試みる。その目的のために、ここでは電界、分極がある周波数 Δ で非常に速く変化しており、しかも $\tilde{E}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ の時間変化が周期 $\frac{2\pi}{\Delta}$ に比べて非常に緩慢であると仮定する。つまり

$$\tilde{E}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Delta t} \hat{E}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Delta t} \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$$

とおき、これを Schrödinger-Bloch 方程式に代入すると

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + 2\Delta + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \hat{E} - \alpha_L \hat{E} + C \hat{\rho} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = (i\Delta - \tilde{\gamma}_{\perp})\hat{\rho} + \tilde{\kappa}W\hat{E} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa}(\hat{E}\hat{\rho}^* + \hat{E}^*\hat{\rho}) - \tilde{\gamma}_{//}(W - W_{\infty}) \quad (4.3)$$

ただし α_L はキャビティによる背景吸収係数を、また $C = \frac{2\pi N\tilde{\kappa}\hbar}{\epsilon}$ はレーザ媒質との結合定数を表す。

ここで速い振動 Δ を抜き出した後の $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$ の時間変化は非常に緩慢であるとして $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0$ とすると (4.2) 式より

$$\hat{\rho} = \frac{\tilde{\kappa}W\hat{E}}{\tilde{\gamma}_{\perp} - i\Delta} \quad (4.4)$$

となり、これを用いて W に関する方程式を書き換えると

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left(-\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2}|\hat{E}|^2 - \tilde{\gamma}_{//} \right) W + \tilde{\gamma}_{//}W_{\infty} \quad (4.5)$$

となる。

さてここでキャビティのエネルギー流について考える。 $|\hat{E}|^2$ をキャビティ全体で積分することによりキャビティからのエネルギー流出を見積もることができる。実際に計算を行なうと

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \frac{\partial |\hat{E}|^2}{\partial t} &= \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy (\dot{\hat{E}}\hat{E}^* + \hat{E}\dot{\hat{E}}^*) \\ &= \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \left(\frac{i}{2}\hat{E}^*(\nabla_{xy}^2 + 2\Delta + \frac{n^2}{n_{in}^2})\hat{E} - \alpha_L|\hat{E}|^2 + C\hat{\rho}\hat{E}^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2}\hat{E}(\nabla_{xy}^2 + 2\Delta + \frac{n^2}{n_{in}^2})\hat{E}^* - \alpha_L|\hat{E}|^2 + C\hat{E}\hat{\rho}^* \right) \\ &= \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \left(\frac{i}{2}(\hat{E}^*\nabla_{xy}^2\hat{E} - \hat{E}\nabla_{xy}^2\hat{E}^*) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha_L|\hat{E}|^2 + C(\hat{\rho}\hat{E}^* + \hat{E}\hat{\rho}^*) \right) \end{aligned}$$

ここで電場の強度をキャビティ内で積分したものを I 、キャビティ内から外へ流れ出ていく電場の大きさを J とすると、 I と J はそれぞれ

$$I = \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy |\hat{E}|^2, \quad J = \frac{i}{2} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \operatorname{div} (\hat{E}^*\nabla\hat{E} - \hat{E}\nabla\hat{E}^*)$$

となり、これよりエネルギーバランスの方程式

$$\frac{d}{dt}I = J - 2\alpha_L I + C \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy (\hat{\rho}\hat{E}^* + \hat{E}\hat{\rho}^*) \quad (4.6)$$

が得られる。ここからさらに (4.6) 式に (4.4) 式を代入することによって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I &= J - 2\alpha_L I + C \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \left(\hat{E} \frac{\tilde{\kappa}W\hat{E}^*}{\tilde{\gamma}_{\perp} + i\Delta} + \hat{E}^* \frac{\tilde{\kappa}W\hat{E}}{\tilde{\gamma}_{\perp} - i\Delta} \right) \\ &= J - 2\alpha_L I + \frac{2C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} W|\hat{E}|^2 dxdy \end{aligned} \quad (4.7)$$

電場 \hat{E} と反転分布 W で書かれたキャビティ内部のエネルギーに関する方程式に変形される。この方程式の表していることは、エネルギーの流れはキャビティ内部から外部へと J という大きさに流出しており、それに加えてキャビティ内部に蓄えられたエネルギー I に比例して $2\alpha_L$ という割合で損失が発生している、そしてその一方で、それらの損失に対し同じく I に比例した形で、 $\frac{2C\tilde{\gamma}_\perp\tilde{\kappa}W}{\tilde{\gamma}_\perp^2+\Delta^2}$ という割合で分布反転 W からエネルギー供給を受けることにより、キャビティ内での微妙なエネルギーバランスが保たれているということである。

さてここまでは Δ を任意の周波数として考えてきた。しかし、物理的に考えると、周波数の中で生き残る事ができるのは、キャビティに共鳴する周波数だけであろう。以下では Δ の意味を考えると同時にエネルギー流 J の意味を明確にする。そのために、共振器にレーザー媒質が存在しないと仮定してみる。するとエネルギーバランス方程式は

$$\frac{dI}{dt} = J \quad (4.8)$$

キャビティが伝統的に使われて来た両面が鏡の1次元的なキャビティならば、共鳴するモードは鏡を往復する単純な定在波になる。ところが、2次元的に広がる誘電媒質をキャビティとする場合には、媒質の形と誘電定数分布からシュレディンガー方程式の固有状態として決まる定常解 $\Psi_n(\mathbf{x})$ が電界の担い手になるだろう。すなわちレーザー媒質を無視したシュレディンガー方程式の解に関する限り

$$E(\mathbf{x}, t) = \sum_n E_n e^{i\Delta_n t} \Psi_n(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

と書けねばならない。ここに Ψ_n , Δ_n は固有関数、固有周波数である。簡単の為に、発振が唯一つの完全な固有状態で起こるならば $\Delta_n = \Delta$ を発振周波数として

$$I = \int_{\Omega_{cavity}} |E(\mathbf{x}, t)|^2 dxdy = |E_n|^2 \quad (4.10)$$

であるから $\frac{dI}{dt} = 0$ となり外に漏れ出るカレントは $J = 0$ である。しかし WG モードを始めとして、2次元キャビティで発振に活躍するモードは完全な定常状態ではなく、寿命を持つ準安定な共鳴状態である場合が多い。このようなモードとは、シュレディンガー方程式のポテンシャルの壁からトンネル効果によって、漏れ出しがあるような解である。この解は核物理のアルファ崩壊の理論で名高いガモフ状態は共鳴状態の典型例となっている。

共鳴状態が完全な定常状態とは異なる点は固有周波数が $\Delta + i\Gamma$ のように複素数になることである。キャビティ内に複素固有共鳴状態が存在するならば

$$I = \int_{\Omega_{cavity}} |E(\mathbf{x}, t)|^2 dxdy = |E_n|^2 e^{-2\Gamma t} \quad (4.11)$$

となり時間とともに減衰していく。したがって、 $\frac{dI}{dt} = -2\Gamma I$ となることから、(4.8) 式のカレントはまさに

$$J = -2\Gamma I \quad (4.12)$$

とならねばならない。このように準安定な共鳴状態が存在する場合 J はキャビティの壁から漏れるトンネル成分、すなわち、エバネッセント光の総量を表している。これを受けてエネルギーバランスの式は最終的に

$$\frac{d}{dt} I = -2\Gamma I - 2\alpha_L I + \frac{2C\tilde{\gamma}_\perp\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2} \int_{\Omega_{cavity}} W |\hat{E}|^2 dxdy \quad (4.13)$$

となる。

次に光子の準位間分布差数に関する方程式を導く。そのためには (4.5) 式をキャビティ内で積分すればよくて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} W dxdy = & -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} |\hat{E}|^2 W dxdy \\ & - \tilde{\gamma}_{//} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} W dxdy + \tilde{\gamma}_{//} W_{\infty} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} dxdy \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで準位間分布数差をキャビティ内で積分したものを D と定義し

$$D = \int_{\Omega_{\text{cavity}}} W dxdy \quad (4.15)$$

またキャビティの面積を S_{Ω} とおくと、 D についての方程式

$$\frac{d}{dt} D = -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} |\hat{E}|^2 W dxdy - \tilde{\gamma}_{//} D + \tilde{\gamma}_{//} W_{\infty} S_{\Omega} \quad (4.16)$$

が得られる。

さてここでキャビティ内の電界がほぼ飽和状態に達しており、急激な変化が起こっていない場合には

$$\int_{\Omega_{\text{cavity}}} W |\hat{E}|^2 dxdy \cong W_{\infty} \int_{\Omega_{\text{cavity}}} |\hat{E}|^2 dxdy \quad (4.17)$$

とみることができ、(4.13) 式と (4.16) 式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt} I = -2\Gamma I - 2\alpha_L I + \frac{2C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} I \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{dt} D = -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} I - \tilde{\gamma}_{//} D + \tilde{\gamma}_{//} W_{\infty} S_{\Omega} \quad (4.19)$$

となり、以上より 2 つの常微分方程式が求められたことになる。

この 2 つの方程式の飽和定常値を I^s, D^s とすると、(4.18) 式と (4.19) 式より $I^s = 0, D^s = W_{\infty} S_{\Omega}$ であることがわかり、この定常値の安定性をみるために I^s, D^s からの微小ずれをそれぞれ $\epsilon(t), d(t)$ とし、 $I = I^s + \epsilon(t), D = D^s + d(t)$ をそれぞれの方程式に代入することにより

$$\frac{d}{dt} d(t) = -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} (I^s + \epsilon(t)) - \tilde{\gamma}_{//} (D^s + d(t)) + \tilde{\gamma}_{//} W_{\infty} S_{\Omega} \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \epsilon(t) = -2\Gamma (I^s + \epsilon(t)) - 2\alpha_L I + \frac{2C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} (I^s + \epsilon(t)) \quad (4.21)$$

微小ずれ ϵ, d についての方程式が得られる。ここで飽和定常値での線形安定性を調べるために $d(t), \epsilon(t)$ についての 1 次の項だけを取り出すと

$$\frac{d}{dt} d(t) = -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} \epsilon(t) - \tilde{\gamma}_{//} d(t) \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt} \epsilon(t) = -2 \left(\Gamma + \alpha_L - \frac{C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} \right) \epsilon(t) \quad (4.23)$$

これを行列の形に直すと

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} d \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\gamma}_{//} & -\frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} \\ 0 & -2\left(\Gamma + \alpha_L - \frac{C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

よってこの行列の固有値は

$$\lambda = -\tilde{\gamma}_{//}, \quad -2\left(\Gamma + \alpha_L - \frac{C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty}\right) \quad (4.25)$$

であり、両方の固有値が負のとき定常値からのずれは常に小さくなる方向に働き定常状態が安定に存在する。

そのための条件は

$$\Gamma + \alpha_L > \frac{C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} W_{\infty} \quad (4.26)$$

である。

エネルギーバランスから考えて、これが成り立つときレーザー発振は起こらず、 $I^s = 0$, $D^s = W_{\infty} S_{\Omega}$ に安定に留まることがわかる。以上より線形近似を施すことにより、レーザー発振の際の閾値が求められた。

4.2 飽和効果について

これまでの議論は線形近似を用いて非線形項を無視してきたため、レーザー発振が起こった場合に、際限なく発振強度が増えてしまうという不都合が生じる。そこでこの節では、非線形性から生じる現象の1つである、飽和効果に焦点をしばって考えることにより、発散の起こらない安定な発振を得るための条件を求めよう。飽和効果をおおまかに理解するために、さらに $W(\mathbf{x}, t)$ の時間変化も周期 $\frac{2\pi}{\Delta}$ に比べて非常に緩慢であると考え、この場合 $\frac{\partial W}{\partial t} \cong 0$ という近似が適用できるので、(4.5) 式より

$$W = \frac{W_{\infty}}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{//}(\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2)} |\hat{E}|^2} \quad (4.27)$$

が得られる。

(4.4) 式とここで得られた W についての等式を (4.13) 式に代入することによって非線形方程式

$$\frac{d}{dt} I = -2\Gamma I - 2\alpha_L I + \frac{2C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} \int_{\Omega_{cavity}} \frac{W_{\infty}}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{//}(\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2)} |\hat{E}|^2} |\hat{E}|^2 dx dy \quad (4.28)$$

が求められる。

この方程式を展開していくにあたって次のような状況を仮定する。

今ある特定のモードが発振しつつあり、発振モードの空間パターンを与える関数型が $\Psi(\mathbf{x})$ であり、電界分布は $\Psi(\mathbf{x})$ の形状を維持しつつ、その振幅だけが時間変化する、すなわち

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = Y(t)\Psi(\mathbf{x}) \quad (4.29)$$

という仮定をおこう。これを (4.28) 式に代入することによって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |Y(t)|^2 = & -2(\Gamma + \alpha_L) |Y(t)|^2 \\ & + \frac{2C\tilde{\gamma}_{\perp}\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2} \frac{W_{\infty}}{|\Psi(\mathbf{x})|^2} \int_{\Omega_{cavity}} \frac{|Y(t)|^2 |\Psi(\mathbf{x})|^2}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_{\perp}}{\tilde{\gamma}_{//}(\tilde{\gamma}_{\perp}^2 + \Delta^2)} |Y(t)|^2 |\Psi(\mathbf{x})|^2} dx dy \end{aligned} \quad (4.30)$$

このときもし発振モードの電界分布 $\Psi(\mathbf{x})$ がキャビティ内に局在しているとするならば、その面積を S_Ψ として、その局在している領域内で $|\Psi|^2 = \frac{1}{S_\Psi}$ 、領域外で $|\Psi|^2 = 0$ という近似をすることができる。するとキャビティ内において

$$\frac{d}{dt}|Y(t)|^2 = -2\alpha_{loss}|Y(t)|^2 + 2\alpha_{gain}\frac{|Y(t)|^2}{1 + \frac{S_a}{S_\Psi}|Y(t)|^2} \quad (4.31)$$

を得る。ただし $\alpha_{gain}, \alpha_{loss}, S_a$ はそれぞれ

$$\alpha_{gain} = \frac{2C\tilde{\gamma}_\perp\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2}W_\infty, \quad \alpha_{loss} = \Gamma + \alpha_L, \quad S_a = \frac{4\tilde{\kappa}^2\tilde{\gamma}_\perp}{\tilde{\gamma}_\parallel(\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2)}$$

とおいた。

よってこの場合の飽和定常値は

$$|Y(t)|^2 = \frac{S_\Psi}{S_a} \left(\frac{\alpha_{gain}}{\alpha_{loss}} - 1 \right) \quad (4.32)$$

となり、この飽和定常値は1つのモードに収容できるフォトン数を表している。仮にキャビティによる吸収項 α_L を考えない場合で束縛状態となっているモードが発振した場合には、エネルギーがエバネッセント線となって外に漏れていく効果が小さくなるため、 α_{loss} がほぼゼロに等しくなり、飽和定常値が非常に大きくなることがわかる。また(4.32)式より再び、モデル方程式にはレーザー発振が起こるための閾値が存在し、 $\alpha_{gain} < \alpha_{loss}$ のときには発振が起こらないことが確認できる。

ただしここで述べた発振の物理的描像は様々な仮定の上に成り立っており、レーザー発振の定性的な概要を得る上では極めて有効であるが、そこには欠陥があることは否めない。発振周波数 Δ は複素数であり、その実部と虚部の果たしている役割についてはまだここまでではよく分からないままであるし、特に周波数の虚部 Γ についていえば、トンネル効果によるエネルギー損失を仮定しているため、 Γ の値は非常に小さいと限定されている。また線形近似が多用されているために、モデル方程式の厳密な取り扱いはなされていないし、そして発振モードの電界分布 $\Psi(\mathbf{x})$ がキャビティ内のある部分に局在するようなモードとは何かということには全く触れられてはいない。ここで積み残されたままになっている問題に対して回答を与えるために、以下の章からはキャビティの形状を定め、より具体的に厳密な理論を展開していくことにしよう。

5 発振に寄与する固有モード

以下ではマイクロキャビティの形状を円形に限定して Schrödinger-Bloch モデルで発振する状態のより厳密な取り扱いを試みる。まず、5.1節ではレーザー媒質が入らない空のキャビティに共鳴する固有状態について論じ、4章で現象論的に導入された複素固有値を決定する方法を述べる。レーザー媒質は考慮されていないので、この状態は真の発振状態を与えるわけではないが、4章の現象論と組み合わせる事によって共振器で発振しうる解の候補を探索するための重要な目安をあたえる。次いで5.2節ではレーザー媒質を導入した完全な系を考え、そこで発振しうる定常解を厳密に決定する問題を考察する。これは非線形問題であり、発振周波数や発振波形が疑義なく決定される点が優れている。特解ではあるが厳密解なので実際に起こる動的挙動を推定する上で重要である。

5.1 線形複素固有値問題

もともと非線形方程式であるレーザー媒質による吸収も考慮にいたモデル方程式を近似を用いて線形化し、求められた線形方程式を数値積分することにより複素固有値を求める。

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \tilde{E} - \alpha_L \tilde{E} + C \tilde{\rho} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\tilde{\gamma}_\perp \tilde{\rho} + \tilde{\kappa} W \tilde{E} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa}(\tilde{E}\tilde{\rho}^* + \tilde{E}^*\tilde{\rho}) - \tilde{\gamma}_\parallel(W - W_\infty) \quad (5.3)$$

ただし α_L はキャビティによる背景吸収係数を、また $C = \frac{2\pi N \tilde{\kappa} \hbar}{\epsilon}$ は結合定数を表す。ここでこれらの方程式に対して、時間部分と空間部分が分離されるとし、レーザー発振が定常状態に達したと仮定したときの特解を用意し

$$\tilde{E}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Delta t} \hat{E}_{st}(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Delta t} \hat{\rho}_{st}(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

$$W = \hat{W}_{st}(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

これらをそれぞれ Schrödinger-Bloch 方程式に代入すると

$$\Delta \hat{E}_{st} = -\frac{1}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \hat{E}_{st} - i\alpha_L \hat{E}_{st} + iC \hat{\rho}_{st} \quad (5.7)$$

$$\Delta \hat{\rho}_{st} = -i\tilde{\gamma}_\perp \hat{\rho}_{st} + i\tilde{\kappa} \hat{W}_{st} \hat{E}_{st} \quad (5.8)$$

$$\hat{W}_{st} = W_\infty - \frac{2\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_\parallel} (\hat{E}_{st} \hat{\rho}_{st}^* + \hat{E}_{st}^* \hat{\rho}_{st}) \quad (5.9)$$

(5.8) 式より

$$\hat{\rho}_{st} = \frac{\tilde{\kappa} \hat{W}_{st}}{\tilde{\gamma}_\perp - i\Delta} \hat{E}_{st} \quad (5.10)$$

なので、これを用いて (5.9) 式は

$$\hat{W}_{st} = \frac{W_\infty}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2 \tilde{\gamma}_\perp}{\tilde{\gamma}_\parallel (\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2)} |\hat{E}_{st}|^2} \quad (5.11)$$

となる。さらに (5.10) 式と (5.11) 式を (5.7) 式に代入することにより

$$\Delta \hat{E}_{st} = -\frac{1}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \hat{E}_{st} - i\alpha_L \hat{E}_{st} + iC \frac{\tilde{\kappa} W_\infty}{\tilde{\gamma}_\perp - i\Delta} \frac{\hat{E}_{st}}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2 \tilde{\gamma}_\perp}{\tilde{\gamma}_\parallel (\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2)} |\hat{E}_{st}|^2} \quad (5.12)$$

非線形定常方程式が得られる。ここからは特に、4章で現象論的に導入された複素固有値の導出を目的として話を展開するため、(右辺) 第3項とキャビティによる吸収項 α_L を無視した、レーザー媒質が入らない空のキャビティに共鳴する固有状態についての線形定常方程式

$$\Delta \hat{E}_{st} = -\frac{1}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} \right) \hat{E}_{st} \quad (5.13)$$

について調べよう。まずこの方程式の内容を理解しやすくするために極座標表示に書き換えると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) \hat{E}_{st}(r, \theta) = 0 \quad (5.14)$$

ここからさらに $\hat{E}_{st}(r, \theta) = Y(r)e^{im\theta}$ と変数分離すると、最終的に円形キャビティの線形定常方程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) Y(r) = 0 \quad (5.15)$$

が求められる。この方程式の表す意味を考えるために $Y(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}$ とおき変形すると

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) y(r) = 0 \quad (5.16)$$

となる。

この方程式は実部と虚部の部分に分けられる。実部に関していえば、 $\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$ の項は角運動量 m とキャビティの中心からの距離 r に依存した関数、 $\frac{n^2}{n_{in}^2}$ はキャビティ半径を境とする r についての階段関数になっており、この2つの項によってポテンシャルが形成され、その中にエネルギー 2Δ を持つ粒子が閉じ込められているという描像がみえてとれる。その一方で虚数の項はキャビティ内部と外部のエネルギー授受を表しており、 2Δ の虚部 2Γ はエネルギー流出を示している。

次に数値的にこの線形複素固有値問題を解き発振周波数 Δ を求める方法について述べる。円形キャビティの線形定常方程式はキャビティ内部と外部の2つに場合分けされる。つまり

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + 1 + 2\Delta \right) Y(r) = 0 \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{n_{out}^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) Y(r) = 0 \quad (5.18)$$

と2つの方程式が求められる。

これら2つの方程式を数値的に効率よく解くために積分区域を次のように分けて考える。円形キャビティの半径を a として、円形キャビティの内部のうちある半径 a_0 まではレーザ媒質は存在しないと、これを領域 A とする。次に半径 a までは本来レーザ媒質のある領域 B 、ただし今考えているのは空キャビティのため、レーザ媒質の存在は考慮しない、そしてその外に領域 C を想定する。このときそれぞれの領域で解が求められ

1. 領域 A

方程式の解は第1種ベッセル関数となり

$$J_m(k_0 r) \quad k_0 \equiv \sqrt{1 + 2\Delta}$$

2. 領域 B

方程式の解は第1種ベッセル関数と第2種ベッセル関数で書け

$$J_m(k_l r), \quad N_m(k_l r) \quad k_l \equiv \sqrt{1 + 2\Delta}$$

3. 領域 C

方程式の解は第1種ハンケル関数と第2種ハンケル関数で求められるが、キャビティ外からの入射波は想定していないので結果的に第1種ハンケル関数のみで表すことができ

$$H_m^{(1)}(k_e r) \quad k_e \equiv \sqrt{(n_{out}/n_{in})^2 + 2\Delta}$$

A, B, C の領域について境界での連続および微分連続を考えると c_1, c_2, c_3 を未定係数として

$$J_m(k_0 a_0) = c_1 J_m(k_l a_0) + c_2 N_m(k_l a_0) \quad (5.19)$$

$$k_0 J'_m(k_0 a_0) = k_l (c_1 J'_m(k_l a_0) + c_2 N'_m(k_l a_0)) \quad (5.20)$$

$$c_3 H_m^{(1)}(k_e a) = c_1 J_m(k_l a) + c_2 N_m(k_l a) \quad (5.21)$$

$$c_3 k_e H_m^{(1)'}(k_e a) = k_l (c_1 J'_m(k_l a) + c_2 N'_m(k_l a)) \quad (5.22)$$

この連立方程式を解き複素数 Δ を求めることは、係数 c_1, c_2 は

$$c_1 = \frac{k_l J_m(k_0 a_0) N'_m(k_l a_0) - k_0 J'_m(k_0 a_0) N'_m(k_l a_0)}{k_l (J_m(k_l a_0) N'_m(k_l a_0) - J'_m(k_l a_0) N_m(k_l a_0))} \quad (5.23)$$

$$c_2 = \frac{k_l J'_m(k_l a_0) J_m(k_0 a_0) - k_0 J'_m(k_0 a_0) J_m(k_l a_0)}{k_l (J'_m(k_l a_0) N'_m(k_l a_0) - J_m(k_l a_0) N'_m(k_l a_0))} \quad (5.24)$$

と与えられるので、最終的に

$$\frac{H_m^{(1)}(k_e a)}{H_m^{(1)'}(k_e a)} \frac{c_1 J'_m(k_l a) + c_2 N'_m(k_l a)}{c_1 J_m(k_l a) + c_2 N_m(k_l a)} - \frac{k_e}{k_l} = 0 \quad (5.25)$$

を満たす複素数 Δ を決定する問題に帰着される。

これにより複素発振周波数が求められるわけであるが、これまでに考察してきたように周波数の虚部は減衰項としての役割を果たすため、長い時間観察するならば定常的な発振は実現されないはずである。しかしながら、マイクロキャビティの形状を固定したことにより、発振周波数を求める過程で関数 $Y(r)$ の形を計算を通して求めることができたため、発振モードの電界分布は $\hat{E}_{st}(r, \theta) = Y(r)e^{im\theta}$ で与えられることより、ある角運動量 m が与えられれば、円形キャビティ内に局在するであろうモードの発振パターンが決定される。結論からいえば、この電界分布はエバネッセント光となって漏れていくエネルギーがごくわずかしかな、境界面を全反射しながら伝播していく whispering gallery モードの形になっている。これより、電界分布がマイクロキャビティの縁に局在し、エバネッセント光として逃げていくエネルギーの量を表す複素周波数の虚部 Γ を持つような発振モードを提示することができた。

5.2 非線形定常問題

前節ではキャビティの幾何学的特徴が要求する発振モードの候補について議論した。しかし実際には、レーザー媒質の存在している下でこれらの候補のいずれかが定常解として発振すると考えられる。定常な発振解を求めるという問題に限定するのであれば、円形キャビティで Schrödinger-Bloch モデル方程式の解を求めることは可能である。そこでここでは非線形レーザー媒質を考慮した非線形定常問題を解き、初期振幅 c_0 と実固有値 Δ を持ち、減衰することのない、実際に発振する可能性のある定常発振モードを求める方法について考察する。そのためには線形固有値問題を解く際にでてきた (5.12) 式を近似を用いることなく積分する方法を考える必要がある。まず

$$\alpha(\Delta, |\hat{E}_{st}|^2) = C \frac{\tilde{\kappa} W_\infty}{\tilde{\gamma}_\perp - i\Delta} \frac{1}{1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2 \tilde{\gamma}_\perp}{\tilde{\gamma}_\perp / (\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2)} |\hat{E}_{st}|^2} \quad (5.26)$$

とおき、極座標表示に書き換えると (5.12) 式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta + 2i\alpha_L - 2i\alpha(\Delta, |\hat{E}_{st}|^2) \right) \hat{E}_{st}(r, \theta) = 0 \quad (5.27)$$

と表すことができ、一般的に

$$\hat{E}_{st}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} E_m(r) \quad (5.28)$$

と角運動量 m について展開できるとし、その場合でも特に一度に発振するのはある m のみであると考える

$$\hat{E}_{st}(r, \theta) = e^{im\theta} E_m(r) = e^{im\theta} \frac{y(r)}{\sqrt{r}} \quad (5.29)$$

として (5.27) 式に代入すると、最終的に非線形定常方程式

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta + 2i\alpha_L - 2i\alpha(\Delta, |\hat{E}|^2) \right) y(r) = 0 \quad (5.30)$$

を得る。

次にこれを数値的にどのように解くべきか考えよう。この円形キャビティの非線形定常方程式はキャビティ内部と外部の2つに場合分けされる。つまり

1. キャビティ内部

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta + 2i\alpha_L - 2i\alpha(\Delta, |\hat{E}|^2) \right) y(r) = 0 \quad (5.31)$$

2. キャビティ外部

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) y(r) = 0 \quad (5.32)$$

実際にこれらの方程式を数値的に積分するにあたって、ある半径 a_0 とキャビティ半径 a を適当に設定し、 $0 \leq r < a_0$ の領域ではレーザー媒質が存在しないとすると、以下の3つの場合に分けられ

1. $0 \leq r < a_0$

この領域では方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta + 2i\alpha_L \right) y(r) = 0 \quad (5.33)$$

で与えられ、 c_0 をある定数とし $k_0 = \sqrt{2\Delta + 1 + 2i\alpha_L}$ すると、その解は第一種ベッセル関数を用いて

$$y(r) = c_0 \sqrt{r} J_m(k_0 r) \quad (5.34)$$

と表される。

2. $a_0 \leq r < a$

この領域では方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta + 2i\alpha_L - 2i\alpha(\Delta, |\hat{E}|^2) \right) y(r) = 0 \quad (5.35)$$

であり、これを直接数値積分する。

3. $a < r$

この領域では解くべき方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta \right) y(r) = 0 \quad (5.36)$$

であり、 c_e をある定数とし、 $k_e = \sqrt{\frac{n^2}{n_{in}^2} + 2\Delta}$ とすると、その解は第一種ハンケル関数を用いて

$$y(r) = c_e \sqrt{r} H_m^{(1)}(k_e r) \quad (5.37)$$

となる。

ここで (5.35) 式が変換 $y_m \rightarrow e^{i\varphi}$ に対して不変であることより、 c_0 は一般性を欠くことなく実数にとることができる。このように場合分けをしたことにより、これら3つの領域の境界での接続を考えて、最終的にまだ決まっていない2つの実数 c_0 と Δ を求める問題に帰着される。具体的な手順は以下のようになる。

$$y(a_0) = c_0 \sqrt{a_0} J_m(k_0 a_0) \quad (5.38)$$

$$y'(a_0) = c_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{a_0}} J_m(k_0 r) + k_0 \sqrt{a_0} J'_m(k_0 a_0) \right) \quad (5.39)$$

なる初期条件より $a_0 \leq r < a$ の範囲で

$$y''(r) = \left(\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{n^2}{n_{in}^2} - 2\Delta + 2i\alpha_L + 2i\alpha(\Delta, |\hat{E}|^2) \right) y(r) \quad (5.40)$$

を数値積分し、 $r = a$ での解がハンケル関数にうまく接続するようにする。

$$y(a) = c_e \sqrt{a} H_m^{(1)}(k_e a) \quad (5.41)$$

$$y'(a) = c_e \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} H_m^{(1)}(k_e a) + k_e \sqrt{a} H_m^{(1)'}(k_e a) \right) \quad (5.42)$$

ここで c_e を消去することにより

$$\frac{y'(a)}{y(a)} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}} H_m^{(1)}(k_e a) + k_e \sqrt{a} H_m^{(1)'}(k_e a) \right)}{\sqrt{a} H_m^{(1)}(k_e a)} = \frac{1}{2a} + k_e \frac{H_m^{(1)'}(k_e a)}{H_m^{(1)}(k_e a)} \quad (5.43)$$

この方程式について両辺の実部、虚部ともに一致するように c_0 と Δ を決定する。

原山らによって非線形定常発振解が詳しく調べられた結果 [19][20]、前節で考慮した線形キャビティの共鳴状態はもちろん、境界面での全反射条件を満たさない場合においても、whispering gallery モードが定常解として存在することが示された。時間発展を考慮した我々のモデルによって、全反射条件を満たさないような臨界モードが実現されるかどうかを確かめることは非常に興味深い問題のひとつであることを強調しておく。

この章を通して線形および非線形定常問題を扱うことによって、定常解を予言することが可能であることを示した。しかし定常問題は定常解の存在は予言できるものの、発振モードの動的安定性や発振が実現可能であるかどうかを確かめることまではできない。それを調べるためには時間発展の過程を解析するよりほかはない。

6 動的シミュレーション

これまで近似を用いて Schrödinger-Bloch モデル方程式を解析し、定常解を求める方法について考察を行ってきたが、それらは果たしてダイナミクスの結果を予言したものであったのだろうか。それらに答えることを主目的として、動的シミュレーションを行なった結果を報告する。

平山らが開発した高速フーリエ変換 (FFT) を用いたアルゴリズムを使い数値計算を行なった結果 [21]、マイクロディスクレーザーの発振現象についてすでにいくつかのことは明らかにされていた。まず whispering gallery モード (WGM) が発振すること、次に発振閾値が存在すること、そして長時間ステップを走らせた結果、定在波から進行波へと移り、最後には挙動不安定を起し発振エネルギーが発散してしまうことである。発散が起こる原因はよくわかっておらず、アルゴリズムに問題があると考えられていたが、本研究を進めるうちにモデル方程式固有の性質であることが判明した。そこで我々はこの問題を回避すべく、これまでのモデル方程式にいままで考慮されていなかったキャビティ自身の吸収項 α_L を新たに加えることによって、以前までの平山らが行なった数値計算では達成できなかった定常状態を見つけ出すことに成功した。

Schrödinger-Bloch モデル方程式に新たに加えられたキャビティ吸収項 α_L の有無が発振モードの選択に非常に大きな影響を与えている。キャビティ吸収項 α_L が発振モードに与える影響を評価するためには、レーザー発振が起こるための条件について考えてみるとよい。この条件は複素線形固有値の実部を Δ 、虚部を Γ とし、(4.26) 式を参照すると

$$\frac{C\tilde{\gamma}_\perp\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2}W_\infty - \Gamma - \alpha_L > 0 \quad (6.1)$$

で表されるので、 $\alpha_{gain} = \frac{C\tilde{\gamma}_\perp\tilde{\kappa}}{\tilde{\gamma}_\perp^2 + \Delta^2}W_\infty$ 、 $\alpha_{loss} = \Gamma + \alpha_L$ とした場合に線形定常方程式よりいくつかの発振候補となるモードが見つかったとし、それらの複素固有値の実部を $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ただし $|\Delta_1| < |\Delta_2| < |\Delta_3| < |\Delta_4|$ とし、横軸を周波数、縦軸を利得にとり、利得関数 α_{gain} とキャビティ吸収項 α_L を合わせて図示すると図 1 が得られる。複素線形固有値の虚部 Γ も含めて表示すると α_{gain} と α_{loss} の関係がよくわかるが、 Γ の値はそれぞれのモードによって異なるため、ここでは α_L の値を図示した。 Γ によるエネルギー損失を考慮すればそれぞれのモードに分配される利得はさらに小さくなる。図 1 からトンネル効果によりエネルギーがキャビティから漏れて出ていくことがなく、キャビティ損失を考慮しない場合には $\alpha_{loss} \cong 0$ となり、利得関数の中心から離れた固有値の実部 Δ_4 を持つモードでさえも利得を得ることができ、発振する権利を持つようになる。これに対しキャビティ損失を考慮した場合は、 Δ_4 のような利得関数の中心から離れた固有値の実部を持ち、このような固有値ではしばしば見られることであるが、束縛状態にあるためトンネル効果によるエネルギー損失がほとんどないようなモードはもはや利得を得ることができない。もし仮にそのようなモードが発振した場合には (4.32) 式から

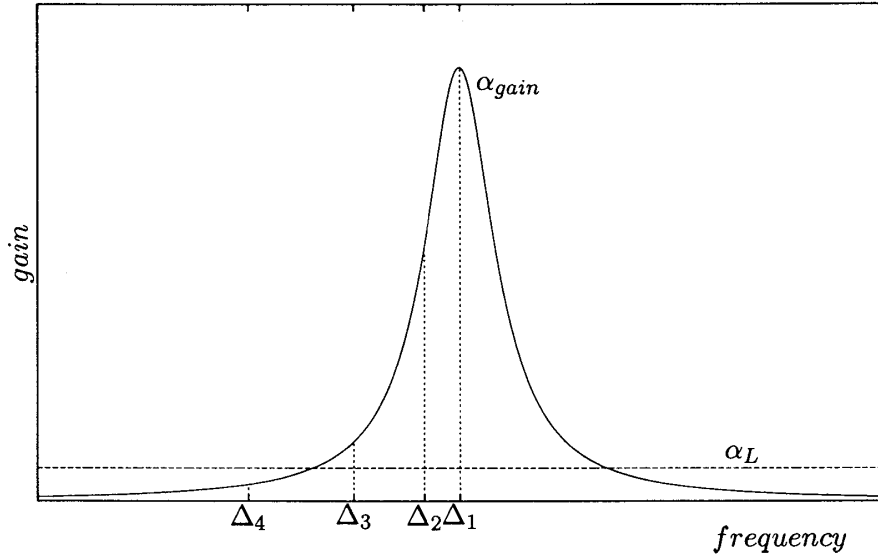


図 1: 利得と損失との対比

推測されるように、 α_{loss} が非常に小さいために飽和定常値が非常に大きくなるため、数値計算途中で発散が起こればと考えられる。したがって現象論的に考えて利得幅をしぼることによって、角運動量の小さい、束縛状態にあるようなモードに発振する権利を与えないようにすることが、安定な発振を得るために必要である。

このキャビティ吸収項 α_L を取り入れた、改良されたモデル方程式

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{xy}^2 + \frac{n^2}{n_{in}^2} + 2i\alpha_L \right) \tilde{E} + \frac{2\pi N \kappa \hbar}{\epsilon} \tilde{\rho} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\tilde{\gamma}_\perp \tilde{\rho} + \tilde{\kappa} W \tilde{E} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\tilde{\kappa} (\tilde{E} \tilde{\rho}^* + \tilde{E}^* \tilde{\rho}) - \tilde{\gamma}_\parallel (W - W_\infty) \quad (6.4)$$

を数値積分するにあたって特に以下のような現象を集中的に調べた。

1. 定常発振と閾値
2. 発振モードの選択性
 - (a) 単一モード発振の特性
 - (b) 多モード発振の特性

これらについて順を追って説明していく。

6.1 定常発振と閾値

レーザー発振はレーザー媒質より供給されるエネルギーが発振モードにうまく行き渡るようになった時点で起こる。ポンピングエネルギーが小さいときには、エバネッセント光となって

自然にエネルギーがマイクロキャビティの外へ漏れてしまうため、最終的に発振するモードとその他たくさん存在する発振しないモードに平等にエネルギーがばらまかれているような状態にあり、レーザー発振は観測されない。そのため一般に、レーザー発振においては発振モードが選択されるにあたって、ポンピングエネルギーに対して閾値が存在し、発振強度 $|E|^2$ はポンピングエネルギー W_∞ とその閾値の差に比例することが知られている。レーザー発振のモデルを作る際にはこの関係が成り立つことが確認されることがモデルの妥当性の重要な目安となる。そこで、ポンピングエネルギー W_∞ を横軸とし、電場強度 $|E|^2$ をキャビティ内でたし合わせたものを縦軸としてプロットすると、 $W_\infty = 7 \times 10^{-4}$ の付近で閾値が存在し、確かにこの関係が成立していることが図2より見てとれる。

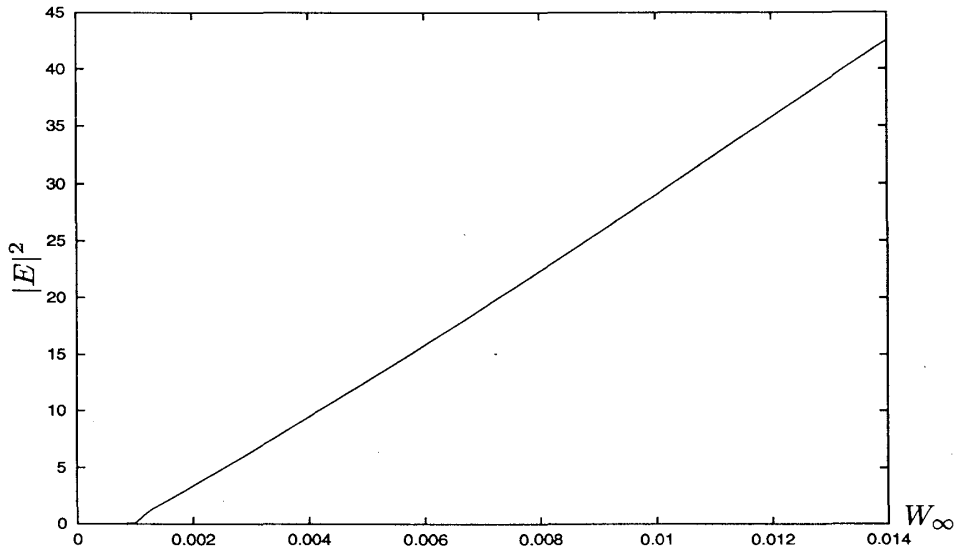


図 2: ポンピングパワーと光強度

それでは実際に閾値以上の利得を得て、レーザー発振が起きた後にどのような発振パターンが見られるのかは興味深い問題である。しかしながら、通常定常状態においてはモデル方程式の対称性により角運動量の m と $-m$ のモードは縮退しているために、方程式からでは発振モードがどのような状態にあるのかを推測することが困難である。そこで数値的にもともと $E = E(x, y)$ とデカルト座標表示であったものを補間法を用いて極座標表示に変換し、変換されたデータ $E = E(r, \theta)$ をそれぞれの角運動量 m について角度方向に積分した後、キャビティ半径 R 内で積分し

$$D_m(r, t) = \int_0^{2\pi} E(r, \theta, t) e^{-im\theta} d\theta \quad (6.5)$$

$$I_m(t) = \int_0^R |D_m(r, t)|^2 dr \quad (6.6)$$

角運動量についての強度分布を計算した。

まず初期値として、電場を正負の角運動量に対して対称に振り分け時間発展させた。その結果図3に示されるように、最初は $m = 9$ と $m = -9$ のモードの定在波として安定に発振していたのが、ごくわずかの摂動を加えて時間発展させることにより $m = 9$ だけの進行波へと移っていった。ただし図3では、横軸は角運動量、縦軸は強度を表している。このことはある角運動量 m が発振モードとして選択された場合において、時計まわりと反時計まわりに回転する進行波が常に安定に発振し、定在波を形作る状態は定常状態ではなく、鞍点の上に存在するよう

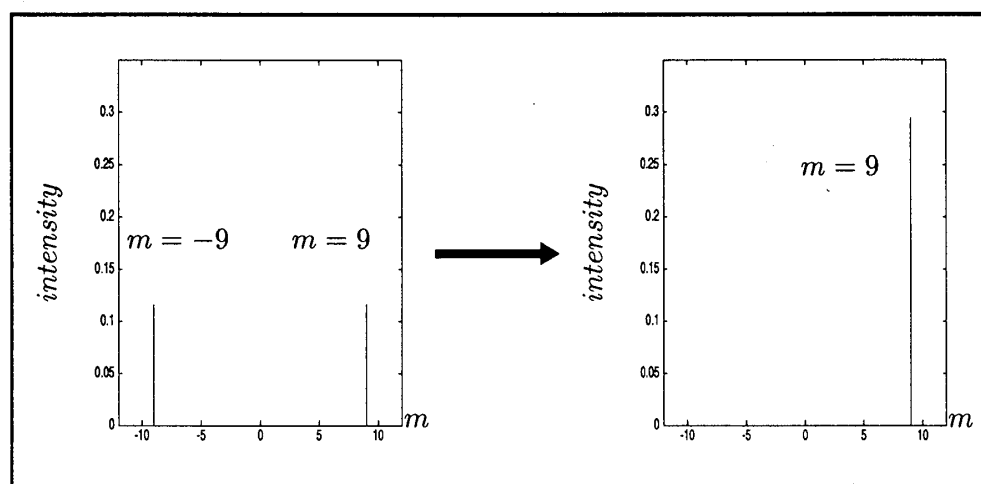


図 3: 定在波から進行波への移り変わり

な準安定状態であることを示している。この現象についてモード競合理論が示唆するところは、利得とのカップリングの強さに依存して、発振するモードが選択されているということである。それゆえここでは進行波は $m = 9$ だけの単一モードであるために、 $m = 9, -9$ の両方の波が立って定在波を形成する場合に比べて利得とのカップリングがより大きいために、進行波が最終的な安定状態となっている。これに関して、図4は時間とともにキャビティ内のエネルギーの変化をプロットしたものであるが、この図からみてもだいたい6000ステップあたりで最初発振していた定在波が崩れ始めたあたりから発振強度が大きくなり、進行波へと移行し、最終的に定常状態に到達する様子からしても、進行波の方が利得とのカップリングが大きいことがうかがえる。

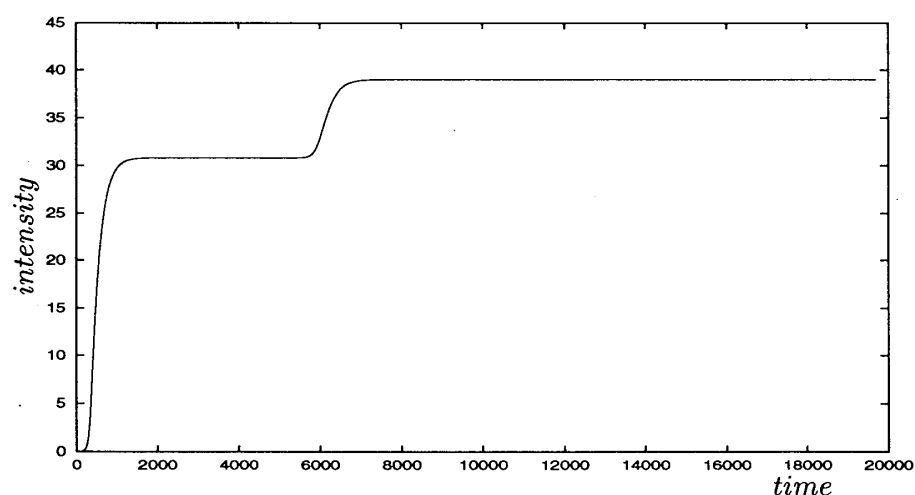


図 4: キャビティ内のエネルギーの時間変化

6.2 発振モードの選択性

ここでは発振モードに焦点を当てた数値実験を行なった結果を示す。発振パターンは単一モード発振から多モード発振まで様々であり、どのような発振が起こるかを決定するのはポンピングパラメータ W_∞ とキャビティによる吸収パラメータ α_L に依っており、この2つパラメータの組み合わせによって発振パターンが定まるといっても過言ではない。線形近似を用いたモード選択理論によると、仮に W_∞ を一定にして α_L を変化させていった場合には、 α_L が大きな領域では利得が分配される領域が利得中心にごく近い領域に限られるため、他の有力な競合しているモードへ利得が分配されるのが阻止されるという理由から単一モードで発振し、 α_L が小さくなるにしたがって、利得が幅広く分配されるようになるため、単一モード発振から他モード発振への転移がみられると予想される。さらに α_L が小さい領域では、たくさんのモードに利得が行き渡るため、利得中心から離れているためにいままで発振が起こらなかったモードも発振する権利を持つようになる。一般的に、このようなモードの線形複素固有値を計算してみると、固有値の虚部 Γ はほぼゼロであることから、これらのモードはエネルギー損失のない束縛状態をとっていることがわかる。したがって、 α_L が非常に小さい場合には、最終的に数値的にエネルギーの発散が起こるまで内部エネルギーが増大し続けると予想される。

6.2.1 単一モード発振の特性

線形モード選択理論によれば、単一モード発振が起こるための十分条件とは (6.1) 式を満たすような複素固有値を持つ発振モードが1つしか存在しないことである。この見積もりは線形近似が成り立つ範囲でのものであるためあくまでも目安であるが、最終的にどのモードが発振するかを検討する上で非常に参考になる。我々が線形複素固有値問題の数値計算を行なった限りでは、円形キャビティの場合には発振するのはどの場合でも whispering gallery モードであった。WGM で発振が起こる場合には、与えられた角運動量 m を持つ固有状態のエネルギーには下限があるので、これから先、共鳴状態も含めてその中で最低エネルギーを持つ状態を m の基底状態と呼ぶことにする。またそれ以外の状態は m の励起状態ということになる。角運動量 m が大きいモードにおいては遠心力が大きくなっており、その結果ポテンシャルが高エネルギー側に移ってくるため図6のように、ポテンシャルの底が浅くなり、基底状態といえどもトンネル効果によってエネルギーの流出のある共鳴状態になっているが、その一方で小さい角運動量を持つモードにおいては基底状態は束縛状態と同義である。我々の数値計算においては、古典力学では存在しない図9のようなポテンシャルの端よりも高いエネルギーを持っているが、かろうじて量子効果によってキャビティ内に閉じ込められている共鳴状態にあるモードも発振する可能性があることが予想された。ここではそのようなモードのことを超臨界モードと呼ぶことにする。

それでは実際にダイナミクスを計算させた結果を紹介していく。まず初めに基底状態にあるモードが発振した場合の例を示す。図5と図6は線形定常方程式より求められたものであるが、図5は横軸を周波数、縦軸を線形利得の大きさにとったときの、基底状態にあるモードが単一で発振する場合のモード分布を表しており、利得中心から近い方から発振モードの角運動量はそれぞれ $m = 9, 6, 5$ である。図6は横軸は半径方向、縦軸はエネルギー、共鳴準位に対しては同時に周波数も意味している、もっとも利得中心に近い $m = 9$ のときのポテンシャルと図5で示した $m = 9$ の共鳴準位を同時に示したものである。ディスク端で屈折率が大きく変わるため、それにしたがってポテンシャルも不連続になっている。実際に数値積分し、時間発展の様子をみた場合には、もっとも利得中心に近い位置にある $m = 9$ のモードが他の $m = 5, 6$ のモードを全て抑えて発振する。このような単一モードが発振する理由は、他のモードの固有値の実部 Δ は $m = 9$ のモードの固有値の実部よりも利得中心からはなれていて利得を得にくいということと、固有値の虚部 Γ が大きくポテンシャルの壁からエバネッセント線となってエネルギー

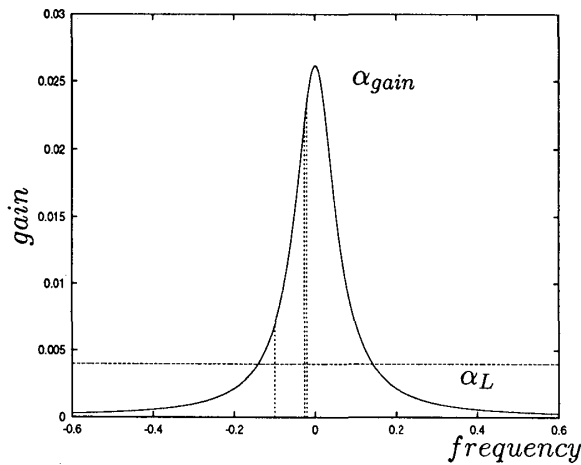


図 5: 単一モード発振の発振モードの分布

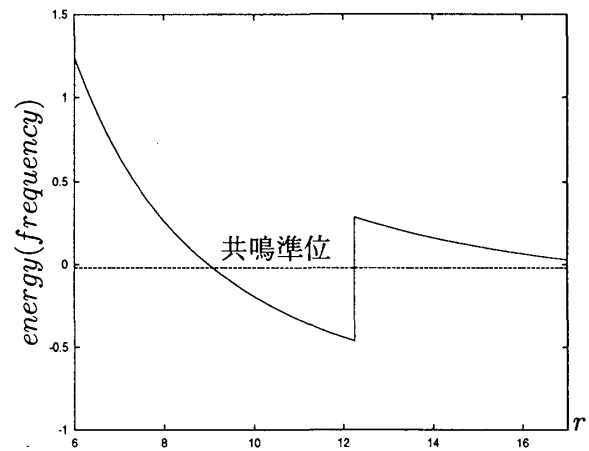


図 6: ポテンシャルと共鳴準位

が外部に放出されるため、時間の経過とともに $m = 9$ のモードに抑えられてしまうということに求められる。図 7 は非線形定常問題を数値的に解くことによって求められた定常解と、モデル方程式を実際に時間発展させたときに定常状態となっている $m = 9$ のモードの発振パターンをそれぞれ半径方向に積分したものである。ただし、横軸は半径方向、縦軸は発振強度を表しており、前者が点線で、後者が実線で示されている。2つのグラフはよく一致しており、非線形定常問題によって見積もられた解が実際に定常状態となって発振していることがわかる。また、これは whispering gallery モードの特徴によるものであるが、この図からディスク半径 R ぎりぎりのところに発振ピークがあり、エネルギーがディスク端から少し浸み出していることがみとれる。

次に同じ単一モード発振ではあるが、発振条件のさらに厳しい超臨界モードが実際に発振した例を示す。図 8 と図 9 は線形定常方程式より求められたもので、単一で発振する可能性のあるモード分布と共鳴準位を表している。利得幅を狭めているために発振する可能性のあるモードは $m = 5$ のモードただ 1 つしか存在しない。またこのときのポテンシャルと共鳴状態を図示すると図 9 のようになる。この共鳴状態はポテンシャル端よりもエネルギーが大きい方へずれているために、古典的には存在しないモードになっており、確かに超臨界モードであることがわかる。ディスク半径が R であるときの非線形定常問題から決まる定常解と時間発展させたのちに定常状態に落ち着いた超臨界モードの発振パターンを、前者を点線で、後者を実線で図示したのが図 10 であるが、発振するにあたって非常に多くのエネルギーがキャビティ外へと漏れ出ており、発振パターンは一般の場合とは様相をかなり異にしている。この場合にも非線形定常問題から求められた定常解とモデル方程式を数値積分することによって求められた定常状態とはよく一致している。超臨界モードで発振している状態というのは、幾何光学における見方を用いて言い直すならば、原山らが主張したディスク内で全反射条件を満たさないような whispering gallery モードが発振していることを意味する [19][20]。そのためこのようにキャビティ内外のエネルギーにほとんど差のない、エネルギー損失がただ単にエバネッセント光で漏れ出す以上にエネルギー流出の大きな発振となっているのである。このようなモードですら発振するということは、うまくパラメータを調整することによって、利得中心に近い位置にありかつ競合するモードがないような状況を造り出した場合にはどのようなモードでも単一モード発振ということを示すほんの一例に過ぎない。しかしそのための条件は非常に厳しく、単一モード発振を得ることは一般に難しいということを強調しておく。

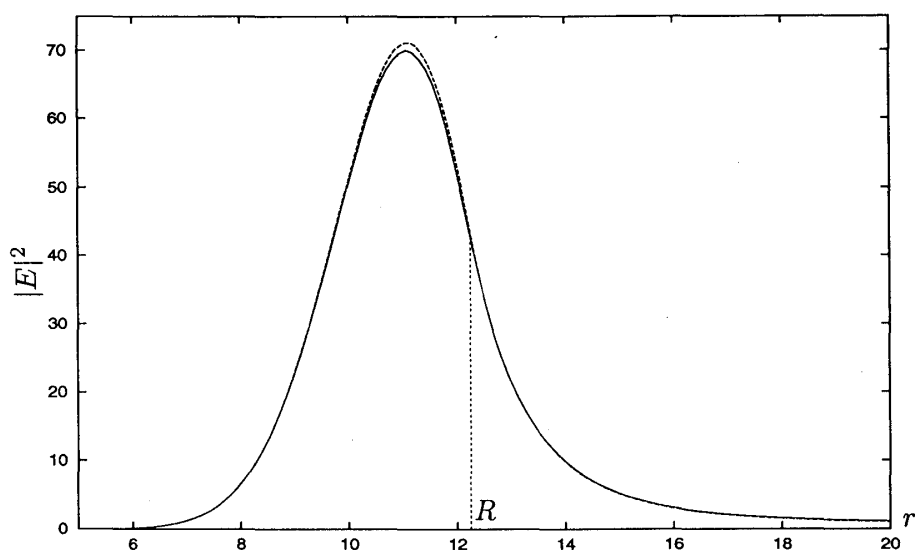


図 7: 非線形定常解と時間発展させることにより求められた定常状態を半径方向へ積分した強度分布

6.2.2 多モード発振の特性

最後に円形キャビティで起こる発振の中でもっとも複雑な多モードで発振する場合について考察する。ポンピングパラメーター W_∞ を固定して考えると、多モード発振が起こるのはキャビティによる吸収項 α_L が相対的に小さいときである。この場合には (6.1) 式と図 1 から容易にわかるように、線形理論の観点から正の利得を持つ多数のモードが発振の権利を持つ事が予想される。このような状況では、一般に角運動量 m が大きい基底状態と m が比較的小さい励起状態がともに正の利得を持つことから、これらのモードが同時に発振する可能性がある。実際、このような場合に得られた数値解の典型例を図 11 に示した。ただし、半径方向を横軸、角度方向の強度を半径方向に積分したものを縦軸として表示している。ここで図中の R はディスク半径を表している。また図 12 に示すように角運動量成分に分解すると、少なくとも $m = 5$ と $m = 9$ のモードが発振している事がわかる。さらに詳しい発振についての情報を与える周波

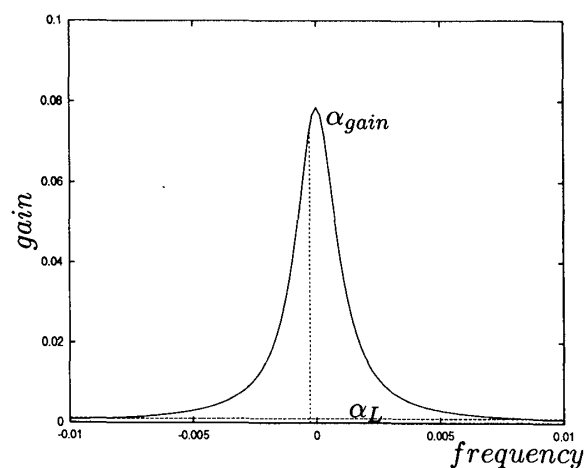


図 8: 超臨界モードの発振モードの分布

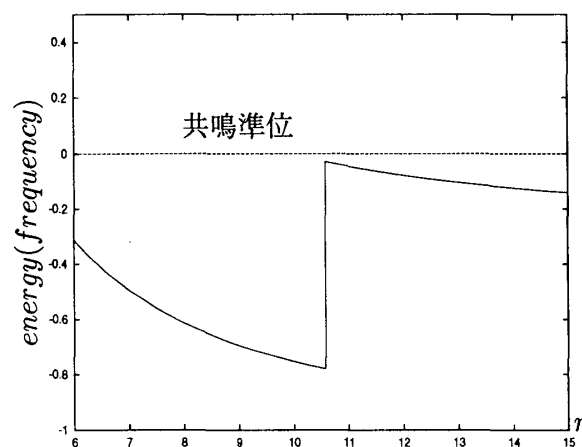


図 9: ポテンシャルと共鳴準位

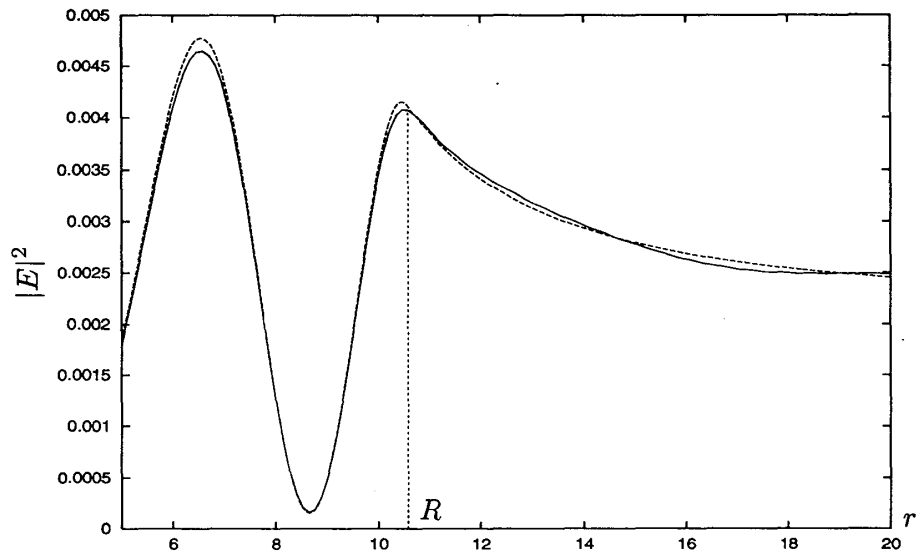


図 10: 非線形定常解と時間発展させることにより求められた定常状態を半径方向へ積分した強度分布

数成分を調べるために、マイクロキャビティ内のある 1 点 x_0 の電場 $E(x_0, t)$ について、有限の時間 T の間のデータを

$$P(x_0, t, \omega) = \left| \int_0^T E(x_0, t + s) \exp(i\omega s) ds \right|^2 \quad (6.7)$$

と計算することにより時間フーリエ変換を行ない、その強度 $|P(x_0, t, \omega)|^2$ を求めた結果が図 13 であり、発振周波数とその発振強度が実線で描かれている。最初は左側の図で見られる様に 1 本の鋭いピークが観測されるが、時間が経つと右側の図で表されるように 2 本の鋭いピークを持つ状態へと移っていった。この事は最初単一の周波数で発振していたレーザーが次第に 2 つの周波数で発振する状態に移行していったことを意味する。ここでははっきりした 2 つのピークが観測されたことにより、2 つのモードが同時に発振していることが確認された。

このような発振が起こる理由を考察するために、線形複素固有値を計算してみた。その結果

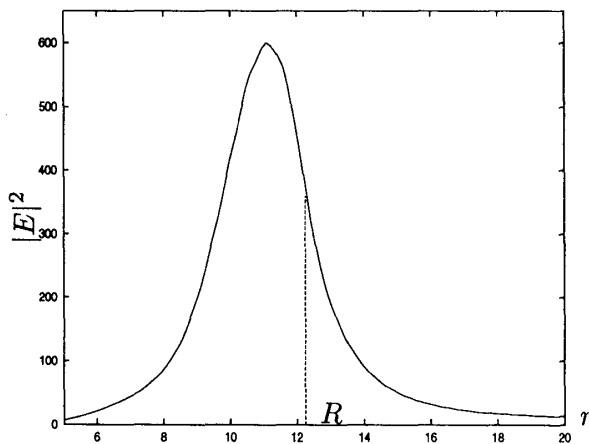


図 11: 多モード発振のときの発振パターン

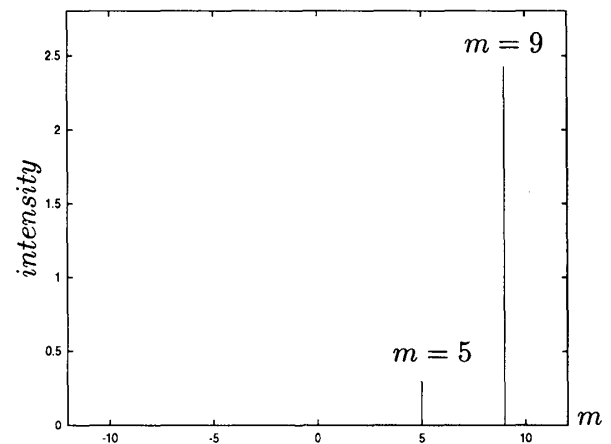


図 12: 発振モードの分布

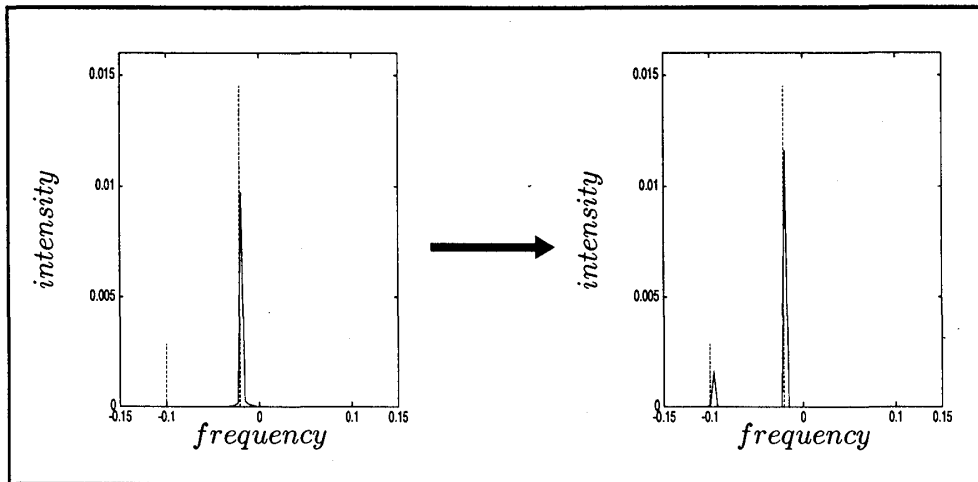


図 13: 線形固有値から決まる発振周波数と時間発展させることによって求められた周波数との比較

を表 1 に示す。表 1 に示される正の利得を持つ発振候補の固有値の実部、すなわち発振周波数

表 1: 複素固有値と線形利得

| 角運動量 | 固有値実部 | 固有値虚部 | 線形利得 |
|------|---------|-------------------------|------------------------|
| 4 | -0.1718 | 0 | 9.078×10^{-3} |
| 5 | -0.1002 | -4.497×10^{-4} | 2.405×10^{-2} |
| 6 | -0.0265 | -1.288×10^{-2} | 6.455×10^{-2} |
| 7 | -0.1653 | 0 | 9.863×10^{-3} |
| 8 | -0.0952 | -4.948×10^{-7} | 2.647×10^{-3} |
| 9 | -0.0207 | -3.535×10^{-4} | 8.201×10^{-2} |

を、時間発展させた後に得られた発振周波数のデータと比べてみた結果、図 13 に示すように線形理論を用いて計算された $m = 5$ と $m = 9$ の発振周波数によく一致した。ただし図 13 において、線形理論から求めた発振周波数の縦軸は、見やすいようにスケールされた線形利得の大きさを表している。

いくつか発振する権利を持つモードがあるうちのたった 2 つのモードしかレーザー発振が観測されないという不思議な現象が起こっているため、その原因を考察するにあたり、表 1 に示された発振可能性を持ったモードの発振パターンを求めた。その結果を半径方向を横軸とし、縦軸を角度方向の強度を半径方向に積分したものとし、そしてキャビティ半径を R として表示したものが図 14 である。図 14 からわかることは、発振可能性のあるモードが 6 つあるうちで、それぞれ半径方向のほぼ同じ位置にピークを持つ 3 つずつの組に分けられるということである。その中で小さい角運動量を持つ $m = 4, 5, 6$ のモードの組はピークを 2 つ持った励起状態であり、最終的にはこの内の $m = 5$ のモードのみが発振し、一方 $m = 7, 8, 9$ のモードの組はピークを 1 つしか持たない基底状態となっており、この内の $m = 9$ のモードのみが発振した。

さてこれらの結果より以下のような 2 つの発振規則が推測される。これからも頻繁に用いるので、あるモードの発振パターンが分布するマイクロキャビティ内の領域のことをここではサ

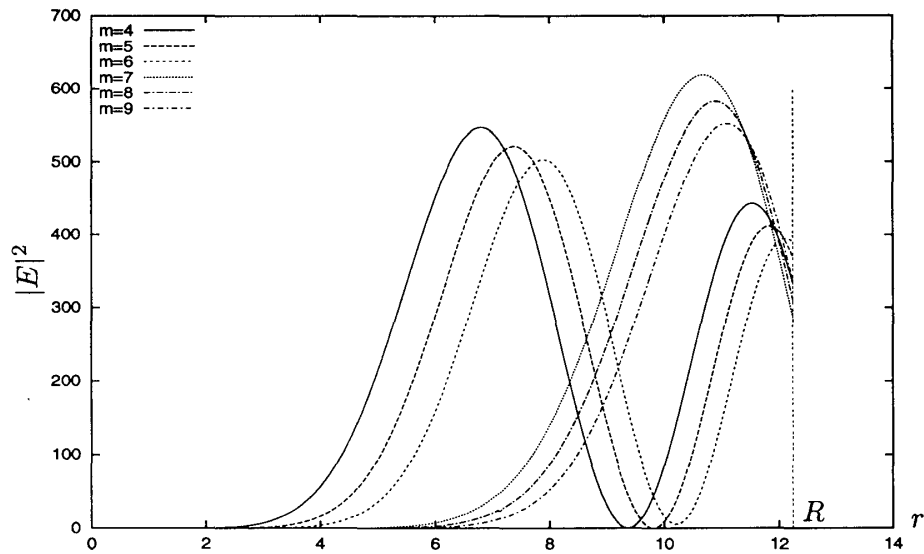


図 14: 線形定常解の角度方向の強度を半径方向に積分した発振強度分布

ポートと呼ぶことにすると、サポートを同じくする発振モードの内、1つのモードしか最終的に発振しない。そしてもう1つは、サポートが異なる小さい角運動量 m を持つ励起状態と大きい角運動量 m を持つ基底状態が発振権利を有するときには多モード発振が起こるということである。

以上2つの推測が実際に成り立っているかどうかを検証するために、様々な角運動量 m を持つモードの発振を観測する目的で、キャビティ半径 R を変えて数値実験を行なった。その例を以下に2つ示す。

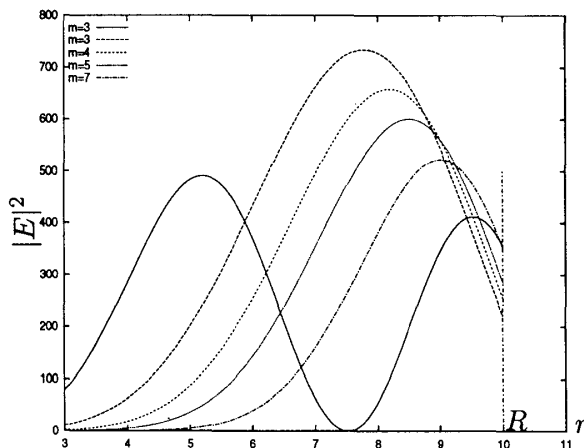


図 15: 線形定常解の角度方向の強度を半径方向に積分した発振強度分布

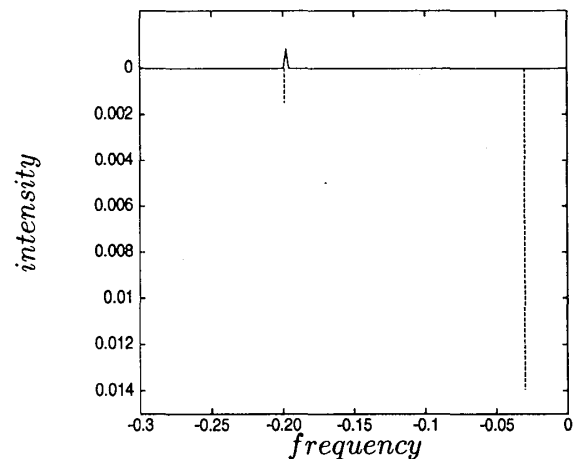


図 16: 線形固有値と時間発展より求められた周波数との比較

まずディスク半径を $R = 10$ として、線形定常解と時間発展の様子を調べた。このとき線形定常解の発振モードは、図 15 の左上に表示したように、 $m = 3, 4, 5, 7$ の角運動量を持つものであり、半径方向を横軸、角度方向の強度を半径方向に積分したものを縦軸にとると、 $m = 3$ のモードが励起状態をとる以外は、すべて基底状態をとるモードが発振することが予想された。そして時間発展をさせた結果発振が見られた周波数と線形定常解の固有値の実部とを比べるた

め、時間発展させて得られた結果を上部に、線形理論から求められた結果を下部にとると図 16 が得られた。ここで横軸は周波数、縦軸は正の方向へは強度、負の方向へは線形利得の大きさを表している。図 16 の線形定常解の固有値の実部は利得中心であるゼロに近い方から $m = 7$ 、 $m = 5$ のモードであり、 $m = 5$ のモードが最終的に発振しているのが確認される。

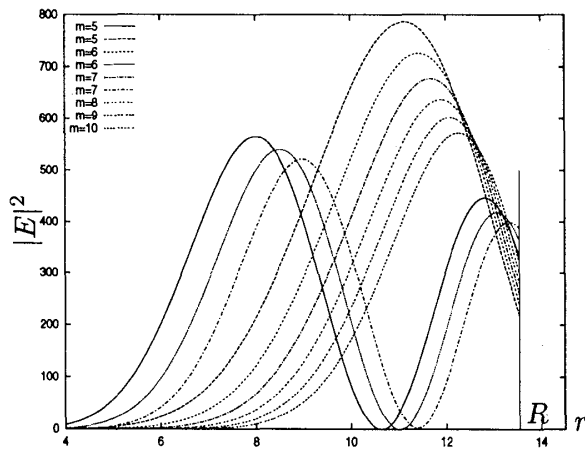


図 17: 線形定常解の角度方向の強度を半径方向に積分した発振強度分布

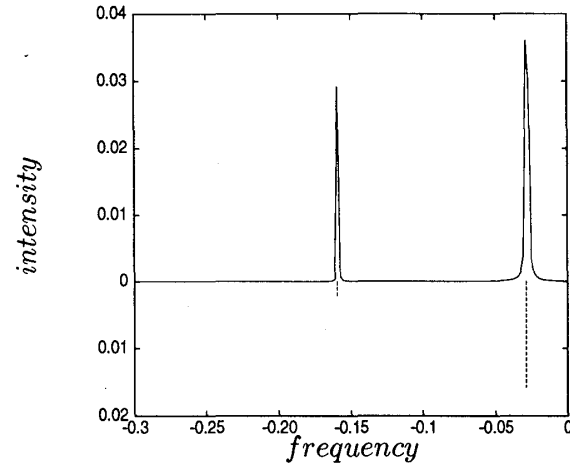


図 18: 線形固有値と時間発展より求められた周波数との比較

次にディスク半径を $R = 13.55$ として、線形定常解と時間発展の様子を調べた。このとき $m = 1$ から $m = 10$ までの角運動量を持った線形定常解が存在したが、ここでは特に図を見やすくするための配慮から、 $m = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ の角運動量を持つもののみを図 17 に表示した。図中では半径方向を横軸とし、角度方向の強度を半径方向に積分したものを縦軸にとってある。線形複素固有値を求めた結果、図 17 に表されるように、角運動量 $m = 5, 6, 7$ を持つものについては基底状態と励起状態の両方が存在しているが、それ以外の角運動量を持つものは、基底状態にあるモードが発振することが予想された。そこで実際に、時間発展させて得られた結果を上部に、線形理論から求められた結果を下部にとると図 18 が得られた。ここで横軸は周波数、縦軸は正の方向へは強度、負の方向へは線形利得の大きさを表している。図 18 において、線形定常解を求めることにより得られた $m = 5$ の励起状態の発振周波数 $\Delta = -0.1597$ と $m = 10$ の基底状態の発振周波数 $\Delta = -0.02886$ を合わせて表示すると、見事に一致することから、 $m = 5$ の基底状態と $m = 10$ の励起状態の 2 モードで発振していることが確認された。

これまでの一連の数値実験結果を考察することにより、以下の 2 つの発振規則が導かれた。まず第 1 に線形定常解を計算した結果、サポートを同じくする発振モードがいくつか存在するときには、もっとも利得中心に近いモードがまず初めに発振するが、最終的にこの最大利得を持つモードが必ず発振するとは限らない。しかしながら、サポートを同じくするモードのうちでは 1 つのモードだけが発振する。第 2 に発振権利を持つモードがいくつかあるがサポートが異なり、大きい角運動量 m を持つモードが基底状態をとり、小さい m を持つモードが励起状態をとる場合には、それらのモード間の競合は小さく、お互いに干渉し合わないため住み分けて多モード発振が起こる。ここで大事なことは利得の大きさには関係なく、少しでも利得が分配されているモードがあれば、長い時間ステップ数を走らせたときにはそのモードが発振する可能性が常に残されているということである。このことがこの系の大きな特徴であり、初めにこの研究に着手した平山らが発振強度が発散する事を突き止め、発散を抑えるために様々な試みを行なったにもかかわらず、最終的に定常状態を発見するに至らなかった原因であった。この平山発散の問題は、キャビティによる吸収項 α_L を考慮することにより回避されたとはいうものの、発振強度が発散するメカニズムが完全には理解されていないため、まだ依然として発散

に関わる問題は残されている。それは安定な2モード発振が起こっている状況で、いかに角運動量 m の小さい、束縛状態にあるモードが発振し始めるかであり、2つのモードが競合している状態において、さらに他の束縛状態にあるモードがそれらの競合モードを抑えて、爆発的にエネルギーが増え始めるための吸収パラメーター α_L に関する条件についてである。

7 総括と今後の展望

2章と3章ではモデル方程式となる Schrödinger-Bloch 方程式を導出し、4章ではその方程式を解析、線形近似を用いてレーザー発振の閾値と飽和定常値を求め、5章では発振モードの同定に役立つ線形および非線形定常解を数値的に求めるための方法について説明し、6章ではモデル方程式を実際に数値積分した結果を前章までに紹介した解析手段を用いて考察した。その結果定常状態が実現され、新たに導入したキャビティの吸収パラメータ α_L が発振モードの選択過程において非常に重要な役割を果たすことが示され、発振パターンの転移を α_L を用いて特徴づけることに成功した。

今後の展望としては、これまでに円形マイクロキャビティにおける発振ダイナミクスについてはほぼ調べることができたため、これまでの解析手段を利用し、楕円形など円形以外のキャビティでのレーザー発振のメカニズムを解明することが望まれる。Schrödinger-Bloch モデル方程式に関しては、実験ではキャリアの拡散がレーザー発振のモード選択性に大きな影響を与えらるという課題が残されている。また最近マイクロディスクレーザーに関しての論文が次々に発表されており、それらの実験側からの結果を我々の理論で説明できるかどうかを定性的に調べてみるのも興味深い。この点では、岡山県立大のグループとの共同研究により、より詳細なマイクロディスクレーザーの発振機構が解明されることが望まれる。理論の展開についていえば、特に古典的にはカオス軌道を描く競技場型のキャビティの場合において、幾何光学で既に求められている結果と比較し、光線と波動の持つ基本的な違いがレーザー発振の現象を通して解明されることが期待される。その大きな目標を達成するにあたって、本研究での結果が役立てられるとすれば幸いである。

8 謝辞

この研究を進めるにあたり御教示、御指導して頂き、また折に触れ叱咤激励して下さった池田研介教授に深い感謝の念を表します。

ATR 適応コミュニケーション研究所の原山卓久氏、Peter Davis 氏には、研究の方向性について議論して頂き、数値計算にあたっては貴重な助言をして頂いたことを大変感謝致します。

岡山県立大学情報工学部の福嶋丈浩助教授には、半導体レーザーやマイクロディスクレーザーに関して、実験に携わっている立場から含蓄ある御教示していただいたことに対し御礼申し上げます。

研究室の先輩である平山元きよ氏には、本研究の基礎となる研究をなされたことに対し敬意を表するとともに、研究を引き継ぐにあたり、数値計算に関する有用なノウハウを頂いたことに非常に感謝致します。

同じテーマで研究を進める中で理論及び数値計算の分野で議論にのって頂いた砂田哲氏と、計算機環境整備のために貴重な時間を割いた頂いた小林泰三氏と城本理恵氏に感謝致します。

参考文献

- [1] S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton, and R. A. Logan, Appl. Phys. Lett. **60** (1992) 289
- [2] R. E. Slusher, A. F. J. Levi, U. Mohideen, S. L. McCall, S. J. Pearton, and R. A. Logan, Appl. Phys. Lett. **63** (1993) 1310
- [3] N. C. Frateschi and A. F. J. Levi, Appl. Phys. Lett. **66** (1995) 2932
- [4] A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. L. McCall, J. L. Glass, S. J. Pearton, and R. A. Logan, Appl. Phys. Lett. **62** (1993) 561
- [5] A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. L. McCall, S. J. Pearton, and W. S. Hobson, Appl. Phys. Lett. **62** (1993) 561
- [6] V. S. Ilchenko, M. L. Gorodetsky, X. S. Yao, L. Maleki, Opt. Lett. **26** (2001) 256
- [7] S. A. Backes, J. R. A. Cleaver, A. P. Heberle, J. J. Baumberg, and K. Köhler, Appl. Phys. Lett. **74** (1999) 176
- [8] M. L. M. Balistreri, D. J. W. Klunder, F. C. Blom, A. Driessen, H. W. J. M. Hoekstra, J. P. Korterik, L. Kuipers, and N. F. van Hulst, Opt. Lett. **24** (1999) 1829
- [9] T. Fukushima, private communication
- [10] *The Theory of Sound vol.II*, J. W. S. Rayleigh (Dover Publications, USA, 1945)
- [11] C. Gmachl, F. Capasso, E. E. Narimanov, J. U. Nöckel, A. D. Stone, J. Faist, D. L. Sivco and A. Y. Cho, Science **280** (1998) 1556
- [12] Y. Yamamoto and R. E. Slusher, Phys. Today **46** (1993) 66
- [13] J. C. Knight, N. Dubreuil, V. Sandoghdar, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J. M. Raimond, and S. Haroche, Opt. Lett. **20** (1995) 1515
- [14] *The Physics of Musical Instruments 2nd Edition*, N.H.Fletcher and T.D.Rossing (Springer-Verlag, New York, 1998)
- [15] S. Chang, N. B. Bex, R. K. Chang, G. Chong, and L. J. Guido, Appl. Phys. Lett. **75** (1999) 166
- [16] J. U. Nöckel, A. D. Stone and R. K. Chang, Opt. Lett. **19** (1994) 1693
- [17] *Optical Processes in Microcavities*, edited by R. K. Chang and A. J. Campillo (World Scientific, Singapore, 1996)
- [18] S. Ancey, A. Folacci and P. Gabrielli, J. Phys. A:Math.Gen. **34** (2001) 1341
- [19] T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 3803
- [20] T. Harayama, P. Davis and K. S. Ikeda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **139** (2000) 363
- [21] 平山元きよ, マイクロディスクレーザの非線形ダイナミクス
立命館大学修士論文 (2001)